Mitteklassikalised loogikad:

sissejuhatus

Sõnad ja laused ja tähendus

- Lause tähendus sõltub järgmistest asjadest:
  - **Lauses olevate sõnade tähendus**
  - **Ütlemise aeg ja koht**
  - **Lause ütleja teadmised**
  - **Lause ütleja teadmised kuulaja teadmiste kohta**
  - **Ühiskonna teadmised (spetsialistid) jne**
  - **Ütleja eesmärgid**
  - **jne jne**
- Selge, et selliste sõnade nagu “koer”, “kuningas”, “mõtlemine”, “rõõm”, “punane” jne tähendus on mittetriviaalne ja sõltub kontekstist jne:
  - **USA president on George Bush.**
  - **Prantsusmaa kuningas on rikas.**

Elementaarsed sõnad, struktuur ja tähendus

- Sünteetilised laused ütlevad midagi olukorra kohta.
- Analüütilised laused on tõesed oma struktuuri tõttu:
  - Kui Jaan on elus ja sööb kala, siis ta sööb kala: **(A & B) => B**
  - Kui Jaan on elus ja sööb kala, siis ta on elus: **(A & B) => A**
- Need analüütilised laused eeldavad, et meil on midagi kindlalt teada sõnade “Poissmees”, “kaks”, “pluss”, “neli” kohta:
  - Poissmees ei ole abielus: **Teadmised => (Iga x . P(x) => - A(x))**
  - Kui keegi on poissmees, siis ta on mees:

    Teadmised => (Iga x . P(x) => M(x))
  - Kaks pluss kaks on neli : **Teadmised => (2 + 2 = 4)**

“Elementaarsed” sõnad?

- **Esiteks: uurime “elementaarsete” sõnade tähendust:**
  - ja, või, järeldub, eksisteerib, iga, ...
  - **(A & B) => B**
  - **Teadmised => (Iga x . P(x) => - A(x))**
  - **...**
  - **Mida need “&” ehk “ja” jne ikkagi tähendavad?**
  - **Kas nende tähendus sõltub ka kontekstist?**
  - **Mis variante nende tähenduse jaoks üldse on?**
- **Teiseks: kas on veel olulisi “elementaarseid” sõnu?**

Mitteklassikalised loogikad räägivad elementaarsõnadest

- **Selgub, et “elementaarsed” sõnad polegi nii elementaarsed!**
  - neil on mitmeid võimalikke tähendusi
  - on veelgi elementaarsemaid “varjatud” sõnu sõnade “ja”, “või” sees!
  - elementaarseid sõnu on rohkem, kui algul paistab

- **Kolm põhiharu mitteklassikalistes loogikates, mida saab kombineerida:**
  - harilike elementaarsõnade teised tähendused:
    - piiratud variandid
    - laiendatud variandid
  - nn substrukturaalsed loogikad, kus “ja”, “või” jne lammutatakse tükkideks
  - sõnad/fraasid “võimatu”, “on võimalik”, “teab” jne

Mis on “klassikaline” loogika?

- **Loogikatehted on funktsioonid tõeväärtustel T ja V.**
- Loogikatehted kui funktsioonid on defineeritud tabelitega:

A	**&**	B
T	**T**	T
T	**V**	V
V	**V**	T
V	**V**	V

A	**V**	B
T	**T**	T
T	**T**	V
V	**T**	T
V	**V**	V

-	A
V	T
T	V

A	**=>**	B
T	**T**	T
T	**V**	V
V	**T**	T
V	**T**	V

- **Kvantorid on “lühendid” lõpmatu arvu “või” ja “ja” jaoks:**
  - Eksisteerib selline x, et P(x): P(0) v P(1) v P(2) v .....
  - Kõigi x-de jaoks P(x): P(0) & P(1) & P(2) & ....

Mis on “klassikaline” loogika?

- Eeldame, et meil on olemas mingid **"asjad",** mille omadusi kirjeldame.

  Kirjeldatavate "asjade" hulka nimetatakse **domeen**iks. Eeldame, et domeen ei ole tühi (st midagi on ikka olemas).

- **Predikaadid** on funktsioonid asjadest ja asjade listidest tõeväärtustele, mida saab defineerida tabeliga a la

  P(1)=F, P(2)=T, P(a)=F, ... R(1,a)=T, R(1,b)=F, ...

- **Funktsioonid** on funktsioonid asjadest ja asjade listidest asjadele, mida mida saab defineerida tabeliga a la

  f(1)=1, f(2)=3, f(a)=1, ... g(a,1)=2, g(a,b)=b, ...

- Mingi valemi F **mudeliks** nimetatakse kolmikut <D, PT, FT> kus D on mingi domeen, PT on mingi predikaate defineeriv tabel ja FT on mingi funktsioone defineeriv tabel kõigi D elementide ja F-s olevate predikaatide ja funktsioonide jaoks.

Mis on “klassikaline” loogika?

- Mingi valemi F **mudeliks** nimetatakse kolmikut <D, PT, FT> kus D on mingi domeen, PT on mingi predikaate defineeriv tabel ja FT on mingi funktsioone defineeriv tabel kõigi D elementide ja F-s olevate predikaatide ja funktsioonide jaoks.

- Valem F on vastuoluline, kui tal ei ole ühtegi mudelit.
- Valem F on kooskõlaline, kui tal on vähemalt üks mudel.
- Valem F on tautoloogiline, kui talle sobib iga mudel.

Mis on “klassikaline” loogika?

Näited:

- D = {0}   PT= {P(0)=T}   sobib   All x . P(x) v -P(x)
- D = {0}   PT= {P(0)=T}   ei sobi   All x . -P(x)
- D = {0}   PT= {P(0)=T}   sobib   All x . P(x)
- D = {0}   PT= {P(0)=T}   ei sobi   E x E y. P(x) & -P(y)
- D = {0,1}   PT= {P(0)=F,P(1)=T}   sobib E x E y. P(x) & -P(y)

Ei sobi ükski lõplik domeen:

- All x,y,z [R(x,y) & R(y,z) => R(x,z)] &

  //// All x,y [R(x,y) v R(y,x)] &

  All x,y [R(x,y) => -R(y,x)] &

  All x Ex y [R(x,y)].

Mis on “klassikaline” loogika?

- Tõestuste teooria ehk proof theory: ei tegele mitte mudelitega, vaid reeglitega ja järeldustega.

- Põhiviisid alus-reeglisüsteemi esitamiseks loogikas (ja, või, järeldub jne tähenduste defineerimiseks):

  - **Hilberti stiilis**: palju aksioome ja vähe reegleid (peam modus ponens)
  - **Naturaalarvutus**: aksioomiks tautoloogia, palju reegleid, järeldused moodustatakse puukujuliselt
  - **Sekventsarvutus**: sarnane naturaalarvutusega, kuid järeldusahel on üks lineaarselt kirjapandav objekt

Model theory and proof theory

- Kaks täiesti erinevat asja:
  - **Mudelite teooria** uurib mudeleid, nende omadusi ja klappimist valemitega (semantika).
  - **Tõestuste teooria** uurib järeldusreegleid ja järelduspuid ning nende omadusi.
- Järeldusreeglite süsteem on **korrektne,** ku**i**: kui valem A on järeldusreeglite abil tuletatav, siis talle klapib iga mudel.
- Järeldusreeglite süsteem on **täielik**, kui: kui valemile B klapib iga mudel, siis see valem on järeldusreeglite abil tuletatav.
- Gödeli teoreem täielikkusest (1929, PhD): esimest järku loogika harilikud reeglite süsteemid on täielikud.

Gödeli mittetäielikkuse-teoreemid

- Kaks mittetäielikkuse teoreemi:

  - No consistent system of axioms whose theorems can be listed by an "effective procedure" (essentially, a computer program) is capable of proving all facts about the natural numbers. For any such system, there will always be statements about the natural numbers that are true, but that are unprovable within the system.

    ehk

    Any effectively generated theory capable of expressing elementary arithmetic cannot be both consistent and complete. In particular, for any consistent, effectively generated formal theory that proves certain basic arithmetic truths, there is an arithmetical statement that is true,[1] but not provable in the theory (Kleene 1967).

  - If such a system is also capable of proving certain basic facts about the natural numbers, then one particular arithmetic truth the system cannot prove is the consistency of the system itself.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus

- Gödeli originaaltõestus:

Throughout the proof we assume a formal system is fixed and satisfies the necessary hypotheses. The proof has three essential parts.

The first part is to show that statements can be represented by natural numbers, known as Gödel numbers, and that properties of the statements can be detected by examining their Gödel numbers.

This part culminates in the construction of a formula expressing the idea that a statement is provable in the system.

The second part of the proof is to construct a particular statement that, essentially, says that it is unprovable.

The third part of the proof is to analyze this statement to show that it is neither provable nor disprovable in the system.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus

- Stephen Cole Kleene (1943) presented a proof of Gödel's incompleteness theorem using basic results of computability theory.

One such result shows that the halting problem is unsolvable: there is no computer program that can correctly determine, given a program *P* as input, whether *P* eventually halts when run with some given input.

Kleene showed that the existence of a complete effective theory of arithmetic with certain consistency properties would force the halting problem to be decidable, a contradiction.

Gödeli esimese mittetäielikkuse-teoreemi tõestus v2

Use the result that we cannot in general decide for a recursive function F if some number x is in the range of F, i.e. there is a set that is recursively enumerable but not recursive.

We proved the existence of such a set in the previous section and gave the example of the halting problem for computer programs.

A formal system that is strong enough to state the halting problem for all programs cannot be decidable.

There are statements of the form "program x never halts" that are true but not decidable in the system. If all such statements were formally decidable then we could decide the halting problem by enumerating all theorems. Eventually (in a finite time) one of the theorems would be that the program does halt or that it does not halt.

Järeldumine ja põhjuslikkus

- Võtame ette “ja”, “või”, “ei”, “järeldub”.
- Kõige mugavam ja põhiline on “järeldub”.

- “Järeldub” on filosoofilises mõttes umbmäärane sõna.
- **Mis tähendab “järeldub”?**
  - Kas “A-st järeldub B” tähendab, et “A põhjustab B”?
  - Aga: **F => T**, seega “Kui kuu peal on lehmi, olen mina kolm meetrit pikk”

- **Põhjuslikkus??**
  - Kivi käest lahti laskmine põhjustab tema kukkumise?
  - Aga gravitatsioon? Asjaolu, et kivi pole laual? jne
  - Liblika tiivalöök Senegalis võib põhjustada orkaani Floridas?
  - Kuidas oleks fatalistliku maailmavaatega: kõik on ette määratud, siis põhjuslikkust justkui polekski?

Esimene teema: loogikasõnade piiratud tähendused

Hierarhia:

- **Klassikaline loogika**: kõige võimsam: kõige rohkem saab järeldada
- **Intuitsionistlik loogika**: ei kehti, et “A või mitte A” on alati tõsi!
- **Relevantne loogika**: ei kehti, et “F => T” (lehmad kuu peal ja 3 m)
- **Minimaalne loogika**: nii vähe saab järeldada, kui veel mõtet on

Uurime neid väiksemast võimsamale: alt üles

Aksioomidena esitatud loogika (Hilbert)

Üks reegel (modus ponens) ja palju aksioome:

Modus ponens:

kui **a => b** ja **a**, siis **b**

Implication:

- p>(q>p)
- (p>(q>r))>((p>q)>(p>r))

And:

- (p&q)>p
- (p&q)>q
- p>(q>(p&q))

Or:

- p>(p+q)
- q>(p+q)
- (p>r)>((q>r)>((p+q)>r))

Kombinaatorid

- B (assoc): ((X ->Y) -> Z) -> (X -> (Y -> Z))
- C (strong comm): ((X -> Z) ->Y) -> ((X ->Y) -> Z)
- I (identity): X -> X
- W (strong contraction): (X->Y) -> ((X->Y)->Y)
- K (weakening): (X->Y)->X
- Peirce: ((A -> B) -> A) -> A

Minimaalne loogika

Järeldusest teame, et:

- p => p
- **(p => (q =>r)) => ((p=>q) => (p=>r))**

Relevantne loogika

- Ei kehti: **a => (b => a)**

Lineaarne loogika

- ... Eraldi materjalid ...